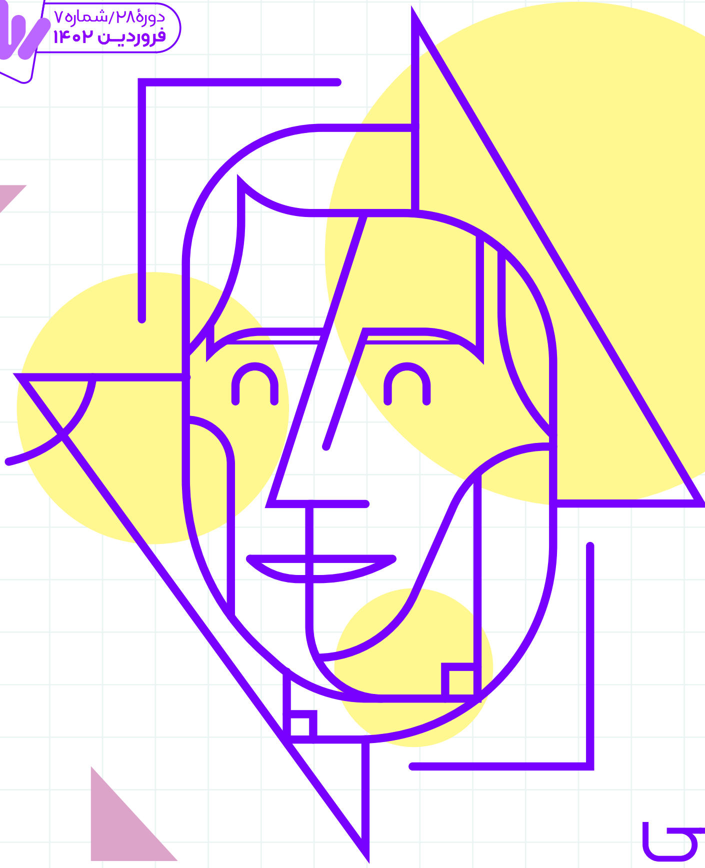


محمود نصیری

مفهوم‌های هندسی و حل مسئله

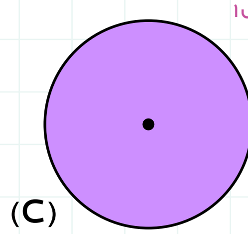
تقارنِ دَوَرانی

اشاره

در قسمت قبل با تعریف تقارن به‌عنوان یک تبدیل طولپا آشنا شدیم. تقارن خطی را نیز تعریف و مثال‌هایی از آن بیان کردیم. در این بخش با نوع دیگری از تقارن که به «تقارن دورانی» یا «تقارن چرخشی» معروف است، آشنا می‌شویم. سپس سعی می‌کنیم مثال‌های متفاوتی همراه با حل‌های متنوع از آن‌ها بیان کنیم.

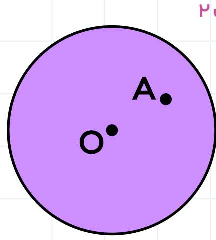
گفتیم تقارن تبدیلی است که تحت آن شکل بر خودش منطبق می‌شود. وقتی شکلی دارای تقارن خطی است، این شکل دو نیمه دارد که هر نقطهٔ یک نیمه، تحت بازتاب نسبت به خط تقارن، بر نیمهٔ دیگر واقع می‌شود. در بخش قبل توضیح دادیم که علاوه بر تقارن خطی که به وسیلهٔ بازتاب یک شکل بر خودش منطبق می‌شود با چرخاندن یا همان دوران نیز می‌توان یک شکل را بر خودش منطبق کرد. همهٔ نقطه‌های روی و درون یک دایره، یک «ناحیهٔ دایره‌ای» نامیده می‌شود. به آن «دیسک» نیز می‌گویند (شکل ۱).

شکل ۱



اگر این دیسک را به اندازهٔ هر زاویهٔ دلخواه به دور مرکز آن بچرخانیم، یا در اصطلاح ریاضی دوران دهیم، در این صورت شکل همواره بر خودش منطبق می‌شود. یعنی با دورانی به اندازهٔ هر زاویهٔ دلخواه چنین اتفاقی رخ می‌دهد. اکنون پرسشی را مطرح می‌کنیم: توجه داریم که در این دوران‌ها دیسک بر خودش منطبق می‌شود، اما ممکن است هر نقطه روی خود آن نقطه واقع نشود. مثلاً اگر A نقطهٔ معینی روی این دیسک باشد (شکل ۲)، با هر دورانی نقطهٔ A روی خودش واقع نمی‌شود.

شکل ۲



اما دوران‌هایی هم وجود دارند که سبب می‌شوند، هر نقطهٔ دیسک مانند A بر خودش منطبق شود. آیا می‌توانید آن‌ها را مشخص کنید؟

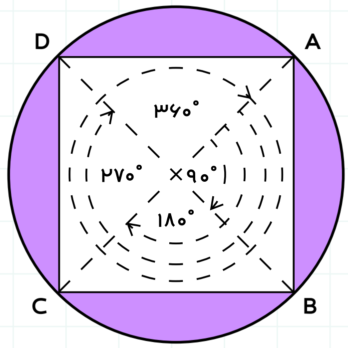
یعنی: «دیسک را گرد مرکز آن چقدر بچرخانیم تا نقطهٔ A دوباره روی خودش واقع شود؟»

این چرخاندن یا دوران دادن اگر یک دور کامل، دو دور کامل و به‌طور کلی هر تعداد دور کامل باشد، از نظر ریاضی دوران به اندازه °۳۶۰×۱، °۳۶۰×۲، °۳۶۰×۳ و کلاً °k×۳۶۰ است، که k برابر ۱، ۲، ۳ و ... خواهد بود.

بنابراین، طبق تعریفی که از تقارن کردیم، این دوران‌ها نیز یک تقارن شکل هستند. حال به جای یک دیسک شکل ۳ را در نظر می‌گیریم که شامل یک دایره و یک مربع است با مجموعه نقطه‌های بین آن‌ها دو قطر مربع که دو قطر دایره نیز هستند، بر هم عمودند. این

شکل را گرد مرکز دایره که همان مرکز مربع نیز هست، در جهت ساعت‌گرد دوران می‌دهیم. آیا مانند دیسک شکل ۱ در هر دورانی شکل ۳ بر خودش منطبق می‌شود؟

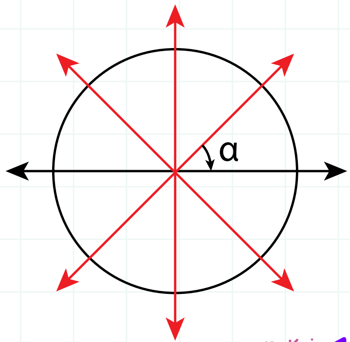
شکل ۳



با کمی دقت مشاهده می‌کنیم که چنین نیست. فقط با دوران‌های به اندازه‌های ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰° و ۳۶۰° این شکل بر خودش منطبق می‌شود.
پس طبق تعریف، هریک از این دوران‌ها را یک تقارن دورانی یا چرخشی این شکل می‌نامیم.
اکنون قبل از آنکه به مثال‌های بیشتری بپردازیم، اجازه بدهید تعریف تقارن دورانی را بیان کنیم:

تعریف: هرگاه در صفحهٔ شکل F، دوران R به مرکز O و زاویه به اندازهٔ α را داشته باشیم که: $0 < \alpha \leq 360°$ اگر: R(F)=F، یعنی دوران‌یافتهٔ F در دوران به مرکز O و اندازهٔ α بر خودش منطبق شود، در این صورت R را یک تقارن دورانی یا پیچشی شکل F می‌نامیم.

با توجه به این تعریف می‌توان گفت دایره و دیسک بی‌شمار تقارن دورانی دارند، زیرا با هر زاویه به اندازهٔ α که: $0 < \alpha \leq 360°$، در دورانی به زاویهٔ α و به مرکز O، مرکز این دایره یا دیسک بر خودش منطبق می‌شود (شکل ۴).
البته با توجه به تعریف تقارن خطی، دایره یا دیسک بی‌شمار تقارن خطی نیز دارد.



شکل ۴

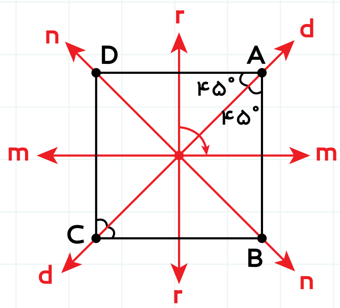
هر خط شامل یک قطر دایره یا دیسک، یک تقارن خطی آن است و هر دوران که مرکز آن روی مرکز دایره یا مرکز دیسک باشد و با هر زاویهٔ α که: $0 < \alpha \leq 360°$ یک تقارن دورانی دایره و دیسک است.

بنابراین:

هر دایره یا دیسک بی‌شمار تقارن خطی و دورانی دارد.

اکنون دوباره به مربع برمی‌گردیم. فکر می‌کنید مربع چند تقارن خطی و چند تقارن دورانی دارد؟

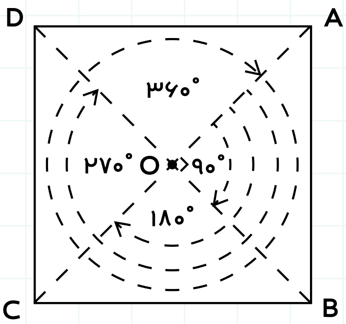
شکل ۵



در شکل ۵ خط‌های d و n شامل قطرهای مربع هستند. آیا با تا کردن صفحهٔ کاغذ روی این دو خط، یک نیمهٔ مربع بر نیمهٔ دیگر آن منطبق می‌شود؟ چرا؟ به غیر از اینکه به‌طور شهودی و همچنین با انجام آن به‌طور عملی می‌توانید این انطباق را نشان دهید، آیا با یک استدلال ریاضی هم می‌توانید آن را ثابت کنید؟ می‌توانید از هم‌نهشتی دو مثلث استفاده کنید. آیا می‌توانید نشان دهید رأس B بازتاب یا قرینه رأس D نسبت به بازتاب با خط d است؟
بنابراین، خط‌های d و n که شامل قطرهای مربع هستند، هرکدام تقارن‌های خطی مربع محسوب می‌شوند. به همین ترتیب، خط‌های r و m که هرکدام به ترتیب از وسط‌های دو ضلع مقابل مربع می‌گذرند نیز تقارن‌های خطی مربع هستند. بنابراین:

مربع دارای چهار تقارن خطی است.

حال به سراغ تقارن‌های دورانی مربع می‌رویم. با توجه به توضیحات قبلی فکر می‌کنم می‌توانیم تقارن‌های دورانی مربع را پیدا کنیم. با یک دوران به اندازهٔ زاویهٔ ۹۰°، گرد مرکز مربع و در جهت ساعت گرد، رأس A روی رأس B و رأس B روی رأس C واقع می‌شود (شکل ۶).



شکل ۶

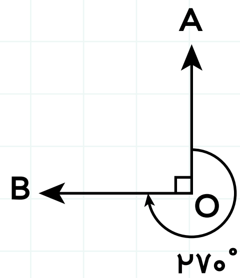
پس ضلع AB مربع روی ضلع BC واقع می‌شود. به همین ترتیب رأس C روی رأس D و بالاخره رأس D روی A واقع می‌شود. در نتیجه ضلع BC روی ضلع CD، ضلع CD روی ضلع DA و ضلع DA روی ضلع AB قرار می‌گیرد. با این دوران، مربع بر خودش منطبق می‌شود. یعنی دوران ۹۰° گرد مرکز مربع یک تقارن دورانی آن است که آن را به صورت $R_{90°}$ نشان می‌دهیم. برای آن می‌توانید یک اثبات ریاضی نیز بیان کنید. می‌توانید از اینکه: OA=OB=OC=OD و اندازهٔ زاویه‌ها کمک بگیرید.
به همین ترتیب با یک دوران گرد O، مرکز مربع و زاویهٔ ۱۸۰° نیز این مربع بر خودش منطبق می‌شود. رأس C دوران‌یافتهٔ رأس A و رأس D دوران‌یافتهٔ رأس B گرد مرکز مربع و با زاویه‌ای به اندازهٔ ۱۸۰° است.

شاید با زاویه‌های با اندازه‌های بزرگ‌تر از °۱۸۰ کمتر آشنایی داشته باشید. در هندسه معمولاً با این نوع زاویه‌ها کمتر سروکار داریم. اما در درسی به نام «مثلثات» که بعداً با آن آشنا می‌شوید، زاویه‌ها به اندازه‌های متفاوت تعریف می‌شوند. حتی زاویه‌هایی به اندازه‌های بزرگ‌تر از °۳۶۰ داریم. همهٔ این زاویه‌ها به کمک دوران تعریف می‌شوند. بعداً با زاویه‌های مثلثاتی با اندازه‌های منفی هم آشنا می‌شوید که به جهت چرخیدن بستگی دارند. مثلاً قرارداد می‌کنند که چرخیدن یا دوران در جهت ساعت‌گرد را مثبت و در جهت خلاف ساعت‌گرد را جهت منفی اختیار کنند.

چنانچه در تعریف بیان کردیم، در تقارن‌های دورانی فقط با زاویه‌های بزرگ‌تر از صفر و کوچک‌تر یا مساوی °۳۶۰ سروکار داریم.

برای آنکه در مربع با تقارن °۲۷۰ بهتر آشنا شوید، تصور کنید سه دوران به اندازهٔ °۹۰ را پشت سر هم انجام داده‌اید: °۲۷۰=°۹۰×۳.

شکل ۷



از نظر هندسی شما یک زاویه به اندازهٔ °۹۰ را مشاهده می‌کنید (شکل ۷)، اما از نظر دوران یا چرخیدن، می‌توانید تصور کنید که به اندازهٔ °۲۷۰ در جهت ساعت‌گرد نقطهٔ A چرخیده یا دوران کرده تا بر نقطهٔ B منطبق شده است. حال اگر در خلاف جهت ساعت‌گرد حرکت کنید، با زاویه‌ای به اندازهٔ °۹۰ می‌توانید A را بر B منطبق کنید اما برای آنکه این دو دوران به‌طور مجزا مشخص باشند، برای آن‌ها جهت قائل می‌شویم. پس می‌توانیم قرارداد کنیم که نقطهٔ A با دورانی به اندازهٔ °۹۰- بر B منطبق می‌شود. در واقع دوران به اندازهٔ °۲۷۰ در جهت ساعت‌گرد معادل دوران به اندازهٔ °۹۰ در جهت خلاف ساعت‌گرد یا °۹۰- است، به همین اندازه توضیح بسنده می‌کنیم و وارد موضوع زاویه‌هایی از این نوع که جهت‌دار با اندازهٔ منفی هستند، نخواهیم شد.

بالاخره مانند دوران °۲۷۰ می‌توانیم دورانی به اندازهٔ °۳۶۰ یا همان یک دور کامل را نیز تعریف و توجیه کنیم. با توجه به آنچه در بالا توضیح دادیم، مربع چهار تقارن دورانی نیز دارد که آن‌ها را به صورت‌های زیر نشان می‌دهیم:

$R_{۹۰^\circ}$، $R_{۱۸۰^\circ}$، $R_{۲۷۰^\circ}$، $R_{۳۶۰^\circ}$

پس مربع به‌طور کلی دارای هشت تقارن است. به این معنی که مربع را می‌توانیم به وسیلهٔ هشت تبدیل طولپا بر خودش منطبق کنیم.

تقارن همانی

اگر مثلث غیرمشخصی را که هیچ دو ضلع آن هم‌اندازه نیستند بررسی کنیم، پی می‌بریم که هیچ تقارن خطی ندارد، اما دارای تقارن دورانی °۳۶۰ است. اکنون به یک پرسش اساسی می‌رسیم: «آیا هر شکلی می‌تواند دارای تقارن °۳۶۰ باشد؟»

جواب به این پرسش ساده است: بله با دوران °۳۶۰ هر شکلی بر خودش منطبق می‌شود. در واقع یک دور کامل است. این در زبان عامیانه نیز گاهی به کار می‌رود که دوباره به جای اول برگشتیم. بنابراین همهٔ شکل‌ها می‌توانند، دارای تقارن دورانی °۳۶۰ باشند. در واقع این تقارن با تقارن‌های دیگر یک تفاوت دارد. آیا می‌توانید این تفاوت را بیان کنید؟

در تقارن‌های به غیر از °۳۶۰ شکل بر خودش منطبق می‌شود، اما هر نقطهٔ شکل بر خودش منطبق نمی‌شود. در حالی‌که در تقارن °۳۶۰، هر نقطهٔ شکل بر خودش منطبق می‌شود. بنابراین تقارن °۳۶۰ را «تقارن همانی» نام‌گذاری می‌کنیم. همانی به معنی اینکه هر نقطه بر خود همان نقطه منطبق می‌شود. پس تعریف زیر را داریم:

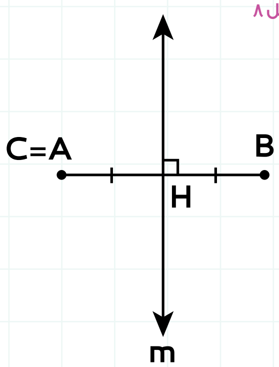
تعریف: تقارنی را که هر نقطهٔ شکل بر خود آن نقطه منطبق شود، تقارن همانی می‌نامیم.

بنابراین، تقارن دورانی °۳۶۰ یک تقارن همانی است.

آیا به غیر از تقارن دورانی °۳۶۰ تقارن همانی دیگری می‌شناسید؟ دو تبدیل طولپای انتقال و بازتاب را در نظر بگیرید. آیا حالتی وجود دارد که این تبدیل‌ها همانی شوند. با کمی تفکر درمی‌یابیم، انتقال به اندازهٔ بردار صفر این ویژگی را دارد. زیرا انتقال به اندازهٔ بردار صفر هر نقطه را به خود آن نقطه تبدیل می‌کند. به بیان دیگر، انگار هیچ حرکتی صورت نگرفته است. اما این موضوع در مورد بازتاب جذابیت بیشتری دارد.

بازتاب S_m را در نظر می‌گیریم (شکل ۸). اگر نقطهٔ A در صفحهٔ خط m مفروض باشد، بازتاب نقطهٔ A را نسبت به m نقطهٔ B می‌نامیم. اکنون بازتاب نقطهٔ B نسبت به m چیست؟

شکل ۸



مسلماً چون: AH=HB، پس اگر بازتاب نقطهٔ B را نسبت به m پیدا کنیم، دوباره همان خود نقطهٔ A است: $B=S_m(A)$ و $C=S_m(B)$.

در نتیجه: A=C. یعنی C بر A منطبق شده است.

این یعنی دو بار بازتاب پیدا کردن نسبت به m، تبدیل همانی است. بنابراین، S_m و به دنبال آن دوباره S_m نیز تقارن همانی است.

در تقارن‌های هر شکل همواره تقارن همانی را نیز در نظر می‌گیریم. در قسمت بعدی به تعیین تقارن‌های بعضی شکل‌های معروف به ویژه چندضلعی‌ها می‌پردازیم.